数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 116-118

巡回ブロックのカルタン行列の固有値について

東京医科歯科大学教養部　清田正夫

(Tokyo Medical and Dental Univ., Masao Kiyota)

1　序文

G を有限群、F を標数 $p>0$ の代数閉体とする。群環 FG は直既約な両側イデアル B_i 達の直和に分解され、各 B_i は FG のブロックと呼ばれている。ブロック B の主要な不変量として、

$l(B)$: B に属す単純 FG 加群の個数、

$k(B)$: B に属す通常既約指標の個数、

$|D|$: B の不足群 D の位数、

カルタン行列 C の単因子

等があり、これらの不変量の間の関係について様々な研究がなされてきた。ここではブロック B の新しい不変量としてカルタン行列 C の固有値をとり上げ、C の単因子との関係を調べる。まず最初にカルタン行列 C の定義を復習する。

$S_1,\ldots,S_l$ $(l=l(B))$ を B に属す単純 FG 加群とし、P_i を S_i の射影被覆とする。整数 $c_{ij}=dim_F Hom_{FG}(P_i,P_j)$ をカルタン不変数と呼び、$l\times l$ 行列 $C=(c_{ij})$ をブロック B のカルタン行列という。

カルタン行列 C の単因子や固有値については次の事実がよく知られている。

（事実１）C の行列式 $detC$ は p べきである。

（事実２）C の最大の単因子は $|D|$ と一致していて、他の単因子はすべて $|D|$ より小さい。

（事実３）C の固有値はいずれも正の実数で、その最大固有値は単根である。これを C の Frobenius 固有値と呼び、$\rho(C)$ で表す。

C の固有値について、村井、和田、清田は [K-M-W] で次の２つを予想した。

（予想１）　もし $\rho(C)=|D|$ ならば C の固有値全体と C の単因子全体は一致するか？

（予想２）　もし $\rho(C)$ が整数ならば、$\rho(C)=|D|$ となるか？

[K-M-W] において (1) G が p 可解群のとき、(2) $D\trianglelefteq G$ のとき、(3) B が有限型や tame 型のときには（予想１）が成立することが確かめられている。また（予想２）は (2), (3) の場合には正しい。G が p 可解群のときでも（予想２）は証明されていない。

2 問題

さて（予想2）をさらに推し進めて、C の固有値全体と C の単因子全体にかんする新たな研究問題を考えることができる。この問題の具体的記述やこれまでに得られている結果については、本報告集の和田倶幸氏の原稿を参照してください。ここでは、問題を巡回ブロックの場合に特化して述べる。

（問題 A） 不足群 D が巡回群とする。C の固有多項式 $f_C(x)$ の $\mathbf{Z}[x]$ における既約分解を

$$f_C(x) = f_1(x) \cdots f_t(x)$$

とする。ここで $f_i(x)$ は monic で、$\rho(C)$ は $f_1(x) = 0$ の根とする。このとき次の (1), (2) が成立するか？

(1) $deg\, f_i \leq deg\, f_1 \qquad (i = 1, \ldots, t)$

(2) $f_1(0) = \pm|D|,\ \ f_i(0) = \pm 1 \qquad (i = 2, \ldots, t)$

上の問題の (1) は一般のブロックでは最近、反例が見つかったが、巡回ブロックでは反例がないのでそのまま問題として残しておく。

3 命題

以下、不足群 D は巡回群とする。このとき $l = l(B)$ は $p - 1$ の約数となり、等式

$$ml + 1 = |D|$$

から (B の重複度と呼ばれる）整数 m が定まる。巡回ブロック B には Brauer tree と呼ばれる l 本の辺をもつ tree T が付随していて、B の構造に関する不変量の多くが、とくにカルタン行列 C が T から計算できる。$m > 1$ のとき T は exceptional vertex と呼ばれる特別な頂点をひとつ持つ。可解群では星型の Brauer tree (exceptional vertex はあれば中心にくる）のみが現れる。Brauer tree T の形を決めて（問題 A）を取り扱うことは、自然なことである。この方向の計算例を 2、3 紹介する。

命題 A B の Brauer tree が星型 (star) のとき、

$$f_C(x) = (x - |D|)(x-1)^{l-1},\ \ or\ (x^2 - (m + l + 1)x + |D|)(x-1)^{l-2}$$

となる。ここで前者は $m = 1$ か exceptional vertex が中心にある場合で、後者は $l > 1$ で exceptional vertex が端点にある場合。

命題 B　B の Brauer tree が open polygon (path) で $m=1$ のとき、
$l=p-1$, $|D|=p$ となり、C の固有値は

$$\lambda = 4\cos^2\frac{k\pi}{2p} \quad (k=1,2,\ldots,p-1)$$

で与えられる。また $f_C(x)$ は 2 つの同じ次数の既約多項式の積となる。

命題 C　B の Brauer tree が open polygon (path) で $m=2$ の exceptional vertex を端点に持つとき、
$l=(p-1)/2$, $|D|=p$ となり、C の固有値は

$$\lambda = 4\cos^2\frac{k\pi}{2p} \quad (k=1,3,\ldots,p-2)$$

で与えられる。また $f_C(x)$ は既約多項式となる。

命題 B 、命題 C において固有多項式 $f_C(x)$ を 2 項係数を用いて表すことができる。多項式　$f_{n,m}$ を

$$f_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left({}_{n+k}\mathrm{C}_{2k} + m\,{}_{n+k}\mathrm{C}_{2k+1}\right)x^k$$

で定義すれば、命題 B では $p \geq 3$ のとき $f_C = f_{p-1,1} = f_{(p-1)/2,2}\,f_{(p-1)/2,0}$ と分解し、命題 C では $f_C = f_{(p-1)/2,2}$ となっている。また数値例から、次の問題が予想されている。

(問題 B)　B の Brauer tree が open polygon (path) で $m \geq 3$ の exceptional vertex を端点に持つとき、$f_C(x)$ は既約多項式となるか？

(問題 B) は $m \geq 3$ のとき $f_{n,m}$ は既約になるかという問いである。

参考文献

[K-M-W] M. Kiyota, M. Murai and T. Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, J. of Algebra, 249 (2002), 110-119